卡尔达诺法解一元三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$$

两边同时除以a，得

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

配立方，得

$$\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}\right)+\left(\frac{c}{a}x-\frac{b^2}{3a^2}x\right)+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}\right)=0$$

即

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

令$z=x+\frac{b}{3a}$，即$x=z-\frac{b}{3a}$，代入上式，得

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(z-\frac{b}{3a}\right)+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z-\frac{b}{3a}\cdot\frac{3ac-b^2}{3a^2}+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z+\left(-\frac{b}{3a}\cdot\frac{3ac-b^2}{3a^2}+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}\right)=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z+\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}=0$$

记$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$，$q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$，则上述方程可化为

$$z^3+pz+q=0$$

令$z=u+v$，代入上述方程，得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

展开$(u+v)^3$，得

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=0$$

提取 $3u^2v+3uv^2$ 的公因式 $3uv$，得

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

合并同类项，得

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

令 $3uv+p=0$，则有

$$u^3+v^3+q=0$$

移项，得

$$u^3+v^3=-q \quad ①$$

由$3uv+p=0$，得

$$uv=-\frac{p}{3}$$

两边立方，得

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \quad ②$$

联立①，②得

$$\begin{cases}u^3+v^3=-q\\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}$$

令$u^3=y_1,v^3=y_2$，则y_1,y_2是以下方程的两根

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$$

于是得到

$$y_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2\ +\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

由于y_1，y_2是对称的，我们不妨令

$$\begin{cases}y_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\\y_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\\v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\end{cases}$$

令$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$，于是

$$\begin{cases}u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\\v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}\end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases}u^3-\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}\right)=0\\v^3-\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}\right)=0\end{cases}$$

根据三次根式的性质，有

$$\begin{cases}u^3-\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\right)^3=0\\v^3-\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\right)^3=0\end{cases}$$

根据立方差公式，有

$$\begin{cases}\left(u-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\right)\left[u^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}u+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]=0 & ④\\\left(v-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\right)\left[v^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}v+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\right)^2\right]=0 & ⑤\end{cases}$$

由④得

$$u-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=0，\text{或}u^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}u+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\right)^2=0$$

解得

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$$
$$u_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$$
$$u_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$$

由⑤得

$$v-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}=0，或v^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}v+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\right)^2=0$$

解得

$$v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$v_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$v_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

以上 3 个u，3 个v互相搭配所构成的 9 种组合，一定满足

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

但只有组合(u_1,v_1)，(u_2,v_2)，(u_3,v_3)满足

$$uv=-\frac{p}{3}$$

因此根据$z=u+v$，只有$z_1=u_1+v_1$，$z_2=u_2+v_2$，$z_3=u_3+v_3$是方程$z^3+pz+q=0$的解

$$z_1=u_1+v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$z_2=u_2+v_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$z_3=u_3+v_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

因此，原方程的解为

$$x_1=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$x_2=-\frac{b}{3a}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$
$$x_3=-\frac{b}{3a}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

其中

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$$
$$q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$$
$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

$$x=-\frac{b}{3a}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^k\sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}+\sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2+\left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3-k}\sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}-\sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2+\left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}},k=0,1,2$$

韦达代换法解一元三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$$

两边同时除以a，得

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

配立方，得

$$\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}\right)+\left(\frac{c}{a}x-\frac{b^2}{3a^2}x\right)+\left(\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}\right)=0$$

即

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

令$z=x+\frac{b}{3a}$，即$x=z-\frac{b}{3a}$，代入上式，得

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}\left(z-\frac{b}{3a}\right)+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z-\frac{b}{3a}\cdot\frac{3ac-b^2}{3a^2}+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z+\left(-\frac{b}{3a}\cdot\frac{3ac-b^2}{3a^2}+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}\right)=0$$

$$z^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}z+\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}=0$$

记$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$，$q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$，则上述方程可化为

$$z^3+pz+q=0$$

令$z=u-\frac{p}{3u}$，代入上述方程，得

$$\left(u-\frac{p}{3u}\right)^3+p\left(u-\frac{p}{3u}\right)+q=0$$

展开$\left(u-\frac{p}{3u}\right)^3$，得

$$u^3-pu+\frac{p^2}{3u}-\frac{p^3}{27u^3}+p\left(u-\frac{p}{3u}\right)+q=0$$

提取$-pu+\frac{p^2}{3u}$的公因式$-p$，得

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}-p\left(u-\frac{p}{3u}\right)+p\left(u-\frac{p}{3u}\right)+q=0$$

合并同类项，得

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$$

两边同时乘以u^3，得

$$u^6-\frac{p^3}{27}+qu^3=0$$

即

$$(u^3)^2+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$$

令$u^3=y$，则上述方程可化为

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0$$

这是一个关于y的一元二次方程，其解为

$$y=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

（平方根任一正负号均可）

因此

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

移项，得

$$u^3-\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)=0$$

根据三次根式的性质，有

$$u^3-\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^3=0$$

根据立方差公式，有

$$\left(u-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)\left[u^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}u+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^2\right]=0$$

即

$$u-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=0,\text{或}u^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}u+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^2=0$$

解得

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$u_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$u_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

根据$z=u-\frac{p}{3u}$，有

$$z_1=u_1-\frac{p}{3u_1}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

$$z_2=u_2-\frac{p}{3u}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{p}{3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

$$z_3 = u_3 - \frac{p}{3u_3} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

这就是方程$z^3+pz+q=0$的解，因此原方程的解为

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}$$

其中

$$p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$$
$$q = \frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$$

$$x = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^k \sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2 + \left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}} + \frac{b^2-3ac}{9a^2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^k \sqrt[3]{-\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3} \pm \sqrt{\left(\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{54a^3}\right)^2 + \left(\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right)^3}}}, k = 0,1,2$$